Chapitre 2
Déterminants

Exercice 1 : En retranchant la première ligne aux autres, on a

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&1\\1&1&-1&1\\1&1&1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-2&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&-2\end{vmatrix}=-8.$$

En effectuant des opérations sur les lignes, on a

$$\begin{vmatrix}1&2&1&2\\1&3&1&3\\2&1&0&6\\1&1&1&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&1&2\\0&1&0&1\\0&-3&-2&2\\0&-1&0&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1\\-3&-2&2\\-1&0&5\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}1&1\\-1&5\end{vmatrix}=-12.$$

De même en utilisant la seconde ligne, on a

$$\begin{vmatrix}0&1&2&3\\1&2&3&0\\2&3&0&1\\3&0&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&2&3\\1&2&3&0\\0&-1&-6&1\\0&-6&-8&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2&3\\-1&-6&1\\-6&-8&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-4&4\\0&4&20\end{vmatrix}$$
$$=-\begin{vmatrix}-4&4\\4&20\end{vmatrix}=96.$$

En effectuant des opérations sur les lignes, puis sur les colonnes, on a

$$\begin{vmatrix}1&i&i&1\\i&0&1&-1\\i&i&i&1\\0&i&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&i&i&1\\0&1&2&-1-i\\0&1+i&1+i&1-i\\0&i&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&-1-i\\1+i&1+i&1-i\\i&0&1\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}i&2&-1-i\\0&1+i&1-i\\0&0&1\end{vmatrix}=i(1+i)=-1+i.$$

Exercice 2 : En effectuant des opérations sur les lignes, on a

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a&a^2\\0&b-a&b^2-a^2\\0&c-a&c^2-a^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b-a&b^2-a^2\\c-a&c^2-a^2\end{vmatrix}.$$

La première ligne se factorise par $(b-a)$ et la seconde par $(c-a)$, donc

$$\Delta=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1&a+b\\1&a+c\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b).$$

En effectuant des opérations sur les lignes, on a

$$D=\begin{vmatrix}1&\cos a&\cos 2a\\1&\cos b&\cos 2b\\1&\cos c&\cos 2c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&\cos a&\cos 2a\\0&\cos b-\cos a&\cos 2b-\cos 2a\\0&\cos c-\cos a&\cos 2c-\cos 2a\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}\cos b-\cos a&\cos 2b-\cos 2a\\\cos c-\cos a&\cos 2c-\cos 2a\end{vmatrix}.$$

En utilisant la formule d'addition, on a $\cos(2x)=2\cos^2(x)-1$, donc

$$D=\begin{vmatrix}\cos b-\cos a&2(\cos^2 b-\cos^2 a)\\\cos c-\cos a&2(\cos^2 c-\cos^2 a)\end{vmatrix}.$$

La première ligne se factorise par $(\cos b-\cos a)$, la seconde par $(\cos c-\cos a)$ et la seconde colonne par 2, donc

$$D=2(\cos b-\cos a)(\cos c-\cos a)\begin{vmatrix}1&(\cos b+\cos a)\\1&(\cos c+\cos a)\end{vmatrix}$$
$$=2(\cos b-\cos a)(\cos c-\cos a)(\cos c-\cos b).$$

Exercice 3 : On commence par additionner toutes les colonnes sur la première, puis on retranche la première ligne aux autres.

$$D=\begin{vmatrix}a+b+2c&c&c&b\\a+b+2c&a&b&c\\a+b+2c&b&a&c\\a+b+2c&c&c&a\end{vmatrix}=(a+b+2c)\begin{vmatrix}1&c&c&b\\0&a-c&b-c&c-b\\0&b-c&a-c&c-b\\0&0&0&a-b\end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la première colonne, puis la dernière ligne, on obtient

$$D = (a+b+2c)(a-b)\begin{vmatrix} a-c & b-c \\ b-c & a-c \end{vmatrix}.$$

Finalement, en additionnant les deux colonnes sur la première, on obtient

$$D = (a+b+2c)(a-b)\begin{vmatrix} a+b-2c & b-c \\ a+2-2c & a-c \end{vmatrix} = (a+b+2c)(a-b)^2(a+b-2c).$$

Exercice 4 : Pour M_a, en utilisant la second ligne en pivot, on obtient

$$\det(M_a) = \begin{vmatrix} 0 & a^2-1 & -a & -1 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ 0 & -a & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2-1 & -a & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -a & 0 & a \end{vmatrix}.$$

En factorisant la dernière ligne et la seconde colonne par a, puis en effectuant des opérations sur les lignes, on obtient

$$\det(M_a) = a^2\begin{vmatrix} a^2-1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2\begin{vmatrix} a^2-2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Finalement, en développant selon la seconde colonne, on trouve

$$\det(M_a) = a^2\begin{vmatrix} a^2-2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = a^2(a-2)(a+2).$$

Comme M_a est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, on en déduit que M_a est inversible si et seulement si $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$.
Pour N_a, on peut factoriser la troisième ligne par a et la dernière colonne par $a^2 - a$, puis en retranchant la troisième colonne à la seconde on obtient

$$\det(N_a) = a^2(a-1)\begin{vmatrix} 0 & a & a & 1 \\ 1 & a-1 & 2a-1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 3a-1 & 0 \end{vmatrix} = a^2(a-1)\begin{vmatrix} 0 & 0 & a & 1 \\ 1 & -a & 2a-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1-2a & 3a-1 & 0 \end{vmatrix},$$

puis en développant selon la troisième ligne, puis la première

$$\det(N_a) = a^2(a-1)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1-2a & 0 \end{vmatrix} = a^2(a-1)\begin{vmatrix} 1 & -a \\ 1 & 1-2a \end{vmatrix} = -a^2(a-1)^2.$$

Comme N_a est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, on en déduit que N_a est inversible si et seulement si $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Exercice 5 :

1. On a
$$\Delta_1 = 3, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 15.$$

2. En développant Δ_{n+2} selon la première ligne, on a
$$\Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix},$$
puis en développant selon la première colonne dans le déterminant ci-dessus, on obtient $\Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n$.

3. En utilisant la formule précédente, on obtient $\Delta_4 = 31$ et $\Delta_5 = 63$. On peut conjecturer que $\Delta_n = 2^{n+1} - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. On démontre $\mathscr{P}_n : \Delta_n = 2^{n+1} - 1$ par récurrence double pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   - Initialisation : Pour $n = 1$ et $n = 2$, on a
   $$\Delta_1 = 3 = 2^{1+1} - 1, \quad \Delta_2 = 7 = 2^{2+1} - 1,$$
   donc $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont vraies.

- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_{n+1}$ sont vraies. On a

$$\Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n = 3(2^{n+2} - 1) - 2(2^{n+1} - 1) = 2^{n+3} - 1,$$

donc $\mathscr{P}_{n+2}$ est vraie.

Finalement, on a montré que $\Delta_n = 2^{n+1} - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 6 : En retranchant chaque colonne à la suivante en commençant par l'avant dernière, on obtient une matrice triangulaire inférieure dont les coefficients diagonaux sont $s_1, s_2 - s_1, s_3 - s_2, \ldots, s_n - s_{n-1}$, donc

$$D = s_1(s_2 - s_1)(s_3 - s_2)\ldots(s_n - s_{n-1}).$$

Exercice 7 :

1. On démontre par récurrence pour $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété

$$\mathscr{P}_n : \quad \forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \left(\forall j \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \leqslant 1\right) \quad \Rightarrow \quad |\det(A)| \leqslant 1.$$

- Initialisation : Pour $n = 1$, la propriété est évidente.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie. Soit $A \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété de l'exercice. En développant le déterminant selon la première colonne, on a

$$|\det(A)| = \left|\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1})\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_{i1}||\det(A_{i1})|.$$

Chaque matrice $A_{i1} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie l'hypothèse sur les coefficients, donc par hypothèse de récurrence, on a

$$|\det(A)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_{i1}||\det(A_{i1})| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_{i1}| = 1.$$

donc $\mathscr{P}_{n+2}$ est vraie.

Finalement, on a montré $\mathscr{P}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de A et

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \alpha_j = \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

S'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\alpha_i = 0$, alors $C_i = 0$, donc $\det(A) = 0$ et l'inégalité est vérifiée. Sinon on note $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont les colonnes sont $\alpha_1^{-1}C_1, \cdots, \alpha_n^{-1}C_n$ La matrice M vérifie les hypothèse de la première question, donc

$$\begin{aligned} |\det(M)| \leqslant 1 \quad &\Leftrightarrow \quad |\det(\alpha_1^{-1}C_1, \cdots, \alpha_n^{-1}C_n)| \leqslant 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha_1^{-1}\cdots\alpha_n^{-1}|\det(C_1, \cdots, C_n)| \leqslant 1 \\ &\Leftrightarrow \quad |\det(A)| \leqslant \alpha_1 \cdots \alpha_n, \end{aligned}$$

ce qui est l'inégalité qu'il fallait démontrer.

Exercice 8 : Avec les propriétés du déterminant, on a

$$\det(M) = \det(M^{\mathrm{T}}) = \det(-M) = (-1)^n \det(M).$$

Comme n est impair, on a $(-1)^n = -1$, donc $\det(M) = -\det(M)$, ce qui implique $\det(M) = 0$. Ainsi, M n'est pas inversible.

Exercice 9 : On note $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a

$$\det_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}_t) = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{vmatrix}.$$

En additionnant toutes les colonnes sur la première, on obtient

$$\det_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}_t) = \begin{vmatrix} t+2 & 1 & 1 \\ t+2 & t & 1 \\ t+2 & 1 & t \end{vmatrix} = (t+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{vmatrix}.$$

En retranchant la première ligne aux autres, on a

$$\det_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}_t) = (t+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t+2)(t-1)^2.$$

Finalement, $\mathscr{F}_t$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $\det_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}_t) \neq 0$, ce qui équivaut à $t \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.

Exercice 10 : On note $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On a

$$\det_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}_{a,b,c}) = \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ -2a & -2b & -2c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

En retranchant la première colonne aux autres, on a

$$\det_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}_{a,b,c}) = -2\begin{vmatrix} a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \\ a & b-a & c-a \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} b^2-a^2 & c^2-a^2 \\ b-a & c-a \end{vmatrix}.$$

La première colonne se factorise par $(b-a)$ et la seconde par $(c-a)$, donc

$$\det_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}_{a,b,c}) = -2(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} a+b & a+c \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2(b-a)(c-a)(b-c).$$

Finalement, $\mathscr{F}_{a,b,c}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ si et seulement si $\det_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}_{a,b,c}) \neq 0$, ce qui équivaut à a, b et c sont deux à deux distincts.

Exercice 11 : On a

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}_t) = \begin{vmatrix} 1+t & t & t & t \\ t & 1+t & t & t \\ t & t & 1+t & t \\ t & t & t & 1+t \end{vmatrix}.$$

En additionnant toutes les colonnes sur la première, on obtient

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}_t) = \begin{vmatrix} 1+4t & t & t & t \\ 1+4t & 1+t & t & t \\ 1+4t & t & 1+t & t \\ 1+4t & t & t & 1+t \end{vmatrix} = (1+4t)\begin{vmatrix} 1 & t & t & t \\ 1 & 1+t & t & t \\ 1 & t & 1+t & t \\ 1 & t & t & 1+t \end{vmatrix}.$$

En retranchant la première ligne aux autres, on a

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}_t) = (1+4t)\begin{vmatrix} 1 & t & t & t \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+4t.$$

Finalement, $\mathscr{F}_t$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}_t) \neq 0$, ce qui équivaut à $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1/4\}$.

Exercice 12 : On note $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Dans le premier cas, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{donc} \quad \det(u) = -1 \neq 0,$$

donc u est un isomorphisme. Dans le second cas, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{donc} \quad \det(u) = 0,$$

donc u n'est pas un isomorphisme.

Exercice 13 : On note $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Dans le premier cas, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{donc} \quad \det(u) = 1 \neq 0,$$

donc u est un isomorphisme. Dans le second cas, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{donc} \quad \det(u) = 0,$$

donc u n'est pas un isomorphisme. Dans le troisième cas, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{donc} \quad \det(u) = 6 \neq 0,$$

donc u est un isomorphisme.

Exercice 14 :

1. Soient $(M,N) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a
$$\varphi(M + \lambda N) = A(M+\lambda N) = AM + \lambda AN = \varphi(M) + \lambda \varphi(N),$$
donc φ est linéaire.
2. Notons $\mathscr{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On a
$$\varphi(E_{11}) = aE_{11} + cE_{21} \qquad \varphi(E_{12}) = aE_{12} + cE_{22}$$
$$\varphi(E_{21}) = bE_{11} + dE_{21} \qquad \varphi(E_{22}) = bE_{12} + dE_{22}.$$
On en déduit que
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}.$$
3. En développant selon la première ligne, on a
$$\det(\varphi) = a \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & d & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & 0 \\ 0 & c & d \end{vmatrix} = (ad-bc)^2 = (\det(A))^2.$$
4. On a que φ est un isomorphisme ssi
$$\det(\varphi) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\det(A))^2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(A) \neq 0,$$
ce qui équivaut à A est inversible.

Exercice 15 : On a $\det(f)^2 = \det(f^2) = \det(-\mathrm{Id}) = (-1)^{\dim(E)}$. Comme $\det(f) \in \mathbb{R}$, on a $\det(f)^2 \geqslant 0$, donc nécessairement $\dim(E)$ est pair.

Exercice 16 :

1. D'après le théorème du rang, on a $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = n-1$. On fixe une base $(v_1, \dots, v_{n-1})$ de $\mathrm{Ker}(u)$ que l'on complète en une base $\mathscr{B} = (v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$ de E par le théorème de la base incomplète. Par construction, on a
$$M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$
où $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.
2. La matrice de $u + \mathrm{Id}$ dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice $M + \mathrm{I}_n$. Cette matrice est triangulaire supérieure avec sur la diagonale $(n-1)$ coefficients 1 et un coefficient $\alpha_n + 1$. On en déduit que $\det(u + \mathrm{Id}) = 1 + \alpha_n$. De plus, on a $\alpha_n = \mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(u)$, donc $\det(u + \mathrm{Id}) = 1 + \mathrm{Tr}(u)$.

Exercice 17 :

1. Si $(u_1, \dots, u_k)$ est une base de $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id})$ et $(v_1, \dots, v_r)$ une base de $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$, alors $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_r)$ est une base de E. De plus, comme s est une symétrie, on a $s(u_i) = u_i$ pour tout $i \in [\![1,k]\!]$ et $s(v_j) = -v_j$ pour tout $j \in [\![1,r]\!]$. En notant, la matrice par bloc, on trouve
$$M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_k & \mathrm{O}_{k,r} \\ \mathrm{O}_{r,k} & -\mathrm{I}_r \end{pmatrix}.$$
2. On en déduit que
$$\det(s) = 1^k \cdot (-1)^r = (-1)^r = (-1)^{\dim(\mathrm{Ker}(s+\mathrm{Id}))}.$$